Imaginäre und komplexe Zahlen

Hansjörg Bögle, 7. 7. 2013

1. Einleitung

Im Bereich der auf der Zahlengeraden liegenden reellen Zahlen lässt sich die Gleichung $x^2 = -1$ nicht lösen, da die Quadrate von positiven wie auch negativen Zahlen positiv sind. In der modernen Mathematik erweitert man deshalb den Bereich der reellen Zahlen um die Lösungselemente $\sqrt{-1} = i$, die sogenannte imaginäre Einheit. Bei geeigneter Definition der Rechenoperationen führt diese Erweiterung nicht zu Widersprüchen und man kann mit den neuen Zahlen fast genau so rechnen wie mit den altbekannten. Eine heute übliche Bezeichnung für die erweiterte Zahlenmenge ist komplexe Zahlen C, von denen die (rein-) imaginären, nämlich die reellen Vielfachen von i, einen Teil bilden. Häufig wird imaginär jedoch als gleichbedeutend mit komplex verwendet.

Innerhalb der Mathematik bieten die komplexen Zahlen viele Vorteile, über die erwähnten Lösungen sonst nicht lösbarer Gleichungen hinaus. Einige Lehrsätze lassen sich mit ihnen leichter beweisen (so sagte J.Hadamard: „Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Aussagen über reelle Zahlen führt über komplexe Zahlen.“), neue Zusammenhänge tun sich auf und Gebiete werden runder. Darüber hinaus bilden die differenzierbaren komplexen Funktionen ein fruchtbares eigenes Forschungsgebiet.

Anwendungen gibt es in den Naturwissenschaften, insbesondere in der Elektrotechnik, wo sich mit ihnen vieles einfacher rechnen lässt, aber auch in der Quantenphysik mit eigenständiger Bedeutung.

Mein Interesse an den imaginären Zahlen, wurde durch den für mich ungewöhnlichen Gebrauch in der Geometrie und durch folgende Aussage Rudolf Steiners, die diese Zahlen mit dem Menschen in Verbindung bringt, neu geweckt:
„Will man aber ins Astrale gehen, so kommt man nicht zurecht mit dem Räumlichen und dem Unräumlichen, sondern man muss eben zum Dritten gehen, das sich zu dem Positiven und Negativen genau so verhält, wie in der formalen Mathematik das Imaginäre zu dem Positiven und Negativen.“ (Stuttgart, 11.3.1920, GA 321, zitiert nach U.Kilthau, G.Schrader, Rudolf Steiner zur Mathematik, Z 559).

2. Historisches und Anwendungen

(Quellen u.a.: P.J.Nahin: An Imaginary Tale. The Story of $\sqrt{-1}$, H.W. Alten u.a. 4000 Jahre Algebra, sowie Internetseiten wie: wikipedia, members.chello.at, www.tf.uni-kiel.de, mo.mathematik.uni-stuttgart.de, www.aeg.rv.bw.schule.de)

Die erste schriftliche Erwähnung scheint im Buch Ars Magna (1545) des italienischen Mathematikers Geronimo (oder Girolamo) Cardano zu stehen, wo es um die Lösung von kubischen aber auch quadratischen Gleichungen geht.

Er beschreibt mit Worten, dass 10 in zwei Summanden zerlegt werden soll, so dass ihr Produkt 40 ergibt, was der **quadratischen Gleichung** $x(10 - x) = 40$ entspricht, und kommt zu den Lösungen $x_{1/2} = 5 \pm \sqrt{-15}$.

Beispielsweise ergibt: $(5 + \sqrt{-15})\cdot(10-(5 + \sqrt{-15})) = (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) =$

$= 25 - (\sqrt{-15})^2 = 25 - (-15) = 40.$

Die Rechnung stimmt also, aber sie erscheint völlig sinnlos.

Anders ist die Lage bei **kubischen Gleichungen**. Bei der Suche nach Nullstellen von Polynomen 3.Grades kommt man vom allgemeinen Fall $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ nach einer vereinfachenden Substitution zur Form $x^3 + 3px + 2q = 0$. Hierfür gibt Cardano die erstaunliche Lösungsformel $x = \sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}} + \sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$ (was ein eigenes Thema wäre).

Solche Ausdrücke hat Rafael Bombelli 1572 in seinem Buch Algebra systematischer untersucht und dabei die Wurzeln aus negativen Zahlen wie Zahlen mit einer anderen Art Vorzeichen verwendet.

Beispiel: $x^3 = 15x + 4$ oder $x^3 - 15x - 4 = 0$,

also $p = -5$, $q = -2$, somit $q^2 - p^3 = 4 - 125 = -121$.

Die Lösungsformel ergibt: $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, wobei die unerklärliche $\sqrt{-121}$ auftritt. Aber am Ende kommt man damit auf sinnvolle reelle Ergebnisse.

Verwendet man als abkürzende, vereinfachende Schreibweise $i = \sqrt{-1}$, also $i^2 = -1$ und somit $\sqrt{-121} = \sqrt{121\cdot(-1)} = 11i$, so ist $x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$.

Mit der Formel $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ erhält man:

$$x^3 = (\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i})^3 =$$

$$(2 + 11i) + 3\cdot\sqrt[3]{2+11i}\cdot\sqrt[3]{2+11i}\cdot\sqrt[3]{2-11i} + 3\cdot\sqrt[3]{2+11i}\cdot\sqrt[3]{2-11i}\cdot\sqrt[3]{2-11i} + (2 - 11i) =$$

$$(2 + 11i) + 3\cdot\sqrt[3]{2+11i}\cdot\sqrt[3]{(2+11i)(2-11i)} + 3\cdot\sqrt[3]{(2+11i)(2-11i)}\cdot\sqrt[3]{2-11i} + (2 - 11i) =$$

$(2 + 11i) + 3\cdot\sqrt[3]{2+11i}\cdot\sqrt[3]{(4-121i^2)} + 3\cdot\sqrt[3]{4-121i^2}\cdot\sqrt[3]{2-11i} + (2 - 11i)$ =

$(2 + 11i) + 3\cdot\sqrt[3]{2+11i}\cdot\sqrt[3]{125} + 3\cdot\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{2-11i} + (2 - 11i)$ =

$(2 + 11i) + 3\cdot\sqrt[3]{2+11i}\cdot 5 + 3\cdot 5\cdot\sqrt[3]{2-11i} + (2 - 11i)$ =

$4 + 15(\sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}) = 4 + 15x$, also ist x wirklich eine Lösung.

Diese Lösung lässt sich glücklicherweise viel einfacher schreiben, denn

$(2+i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 i + 3\cdot 2i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$, also $\sqrt[3]{2+11i} = 2 + i$ und

$(2-i)^3 = 2^3 - 3\cdot 2^2 i + 3\cdot 2i^2 - i^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$, also $\sqrt[3]{2-11i} = 2 - i$ und somit

$x = 2 + i + 2 - i = 4$, eine vertraute Zahl ohne undurchsichtige Anteile. Dass $x = 4$ eine Lösung der Gleichung ist, lässt sich leicht nachrechnen. Weitere Lösungen sind $-2 \pm \sqrt{3}$.

Obwohl in der Formel von Cardano eine Wurzel aus einer negativen Zahl vorkommt, was sich nicht durch eine andere, geschicktere Formel vermeiden ließ, erhält man am Ende Lösungen innerhalb der reellen Zahlen.

Man konnte sich jedoch nichts unter diesen Zahlen vorstellen. Möglicherweise als erster nannte sie Descartes (1596-1650) „eingebildete oder imaginäre Zahlen“. Leibniz (1646-1716) bezeichnete sie als „Wunder der Analysis, beinahe ein Zwitterwesen zwischen Sein und Nichtsein“. Leonhard Euler (1707-1783), der sie verwendete und die Bezeichnung i einführte, nannte sie auch „unmögliche Zahlen“. Doch vielfach erwiesen sie sich als nützlich und bürgerten sich ein. Dennoch war der Gebrauch dieser Zahlen problematisch, denn sie führten leicht zu Widersprüchen, wie man an der folgenden falschen Gleichung sieht:
$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i\cdot i = -1$.

Erst durch die Arbeiten von Wessel 1796, Argand 1806 (die beide wenig beachtet wurden und in etwa den geometrischen Gedanken hatten, dass bei der Proportion 1:x = x : (-1) die Strecke mit der Länge x um 90° gedreht sein müsse, sowohl gegenüber +1 als auch -1) und dann Gauss 1831 wurden klare mathematische Grundlagen gelegt. Von Staudt (1798-1867) gab von der Seite der projektiven Geometrie aus eine andere geometrische Interpretation der komplexen Zahlen.

2. Die gängige mathematische Beschreibung der komplexen Zahlen

Kartesische Koordinaten

Die komplexen Zahlen haben zwei Anteile, einen reellen und einen imaginären. Geometrisch können sie als die Punkte der Ebene betrachtet werden. Auf dieser Menge R^2, deren Elemente als Paare (a,b) = **a+bi** = a+ib = z geschrieben werden, definiert man nun die Rechenoperationen +,-,·, : so, dass die von den reellen Zahlen bekannten Rechengesetze weiter gelten. Man erhält so den Körper C der komplexen Zahlen mit den üblichen Körpereigenschaften. Die reellen Zahlen a+0i können als Teil der komplexen Zahlen angesehen werden. Man nennt a den Realteil und b den Imaginärteil von a+bi. Dabei hat i die Eigenschaft, dass $\mathbf{i^2 = -1}$. Weitere Potenzen von i sind $i^3 = -i$ und $i^4 = 1$ usw.

Man definiert:

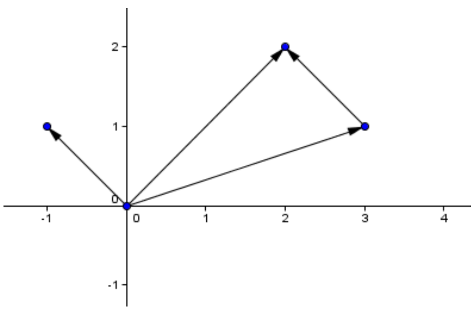
(a+bi) + (c+di) = (a+c)+(b+d)i

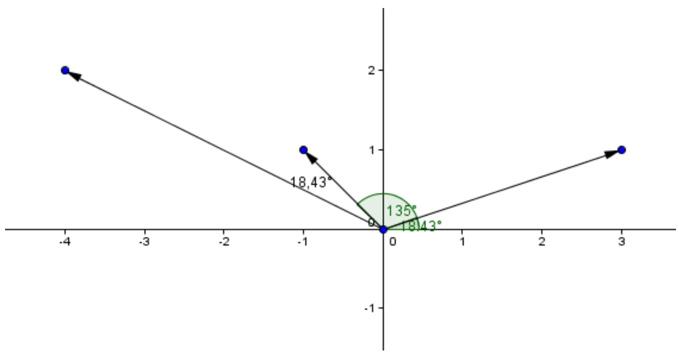
Realteil und Imaginärteil werden einzeln addiert wie bei Vektoren.

$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$

Beispiel: (3+1i) + (-1+1i) = 2+2i

$(3+1i)(-1+1i) = -3 + 3i - 1i + 1i^2 = -4 + 2i$





Damit lässt sich ein Inverses $(a+bi)^{-1}$ mit $(a+bi)(a+bi)^{-1} = 1$ (für $a+bi \neq 0$, d.h. $a^2+b^2 \neq 0$), bzw. eine Division (a+bi) : (c+di) erklären (für $c+di \neq 0$):

$$(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \quad \text{und}$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\,.$$

Eine Eigenschaft, die wir von den reellen Zahlen her kennen, gilt allerdings nicht mehr. Die reellen Zahlen sind in einer Reihenfolge auf der Zahlengeraden angeordnet und lassen sich in ihrer Größe vergleichen. Die Zahlen weiter rechts sind größer als die Zahlen weiter links. Eine sinnvolle Ausdehnung dieser Anordnung auf die komplexen Zahlen ist nicht möglich.

Polarkoordinaten

Nennt man Betrag einer komplexen Zahl $r = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ und den Winkel zur reellen Achse φ, so lassen sich die komplexen Zahlen $z = a+bi$ auch in Polarkoordinaten schreiben: $z = r\cdot\cos\varphi + r\cdot i\cdot\sin\varphi$.

Bei den Potenzreihen $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$ und $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$,

sowie $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ erkennt man einen Zusammenhang. Setzt man ix in die Exponentialfunktion und sammelt die reellen und imaginären Summanden, so ergibt sich die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Damit lässt sich eine komplexe Zahl z auch kurz schreiben als $z = \mathbf{r\cdot\cos\varphi + r\cdot i\cdot\sin\varphi = r\cdot e^{i\varphi}}$. Genau genommen gilt $\mathbf{z = r\cdot e^{i(\varphi+2m\pi)}}$ für jede ganze Zahl m, wobei das m nur manchmal in Erscheinung tritt.

In Polarkoordinaten bedeutet die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $r_1 e^{i\varphi}$ und $r_2 e^{i\psi}$ eine Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel:

$$r_1 e^{i\varphi} \cdot r_2 e^{i\psi} = r_1 r_2 e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Die Division lautet: $r_1 e^{i\varphi} : r_2 e^{i\psi} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi-\psi)}$.

Damit lässt sich eine komplexe Zahl $z = e^{i\varphi}$ schnell potenzieren:

$$z^n = (r\, e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Umgekehrt kann man die n-te Wurzel ziehen: $\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2m\pi}{n})}$, mit verschiedenen Werten für m = 0, 1, …, n-1.

Sucht man die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, die sogenannten n-ten Einheitswurzeln, so erhält man $e^{i\cdot\frac{2m\pi}{n}}$ für m = 0, 1, …, n-1, die in gleichmäßigen Winkeln auf dem Einheitskreis liegen.

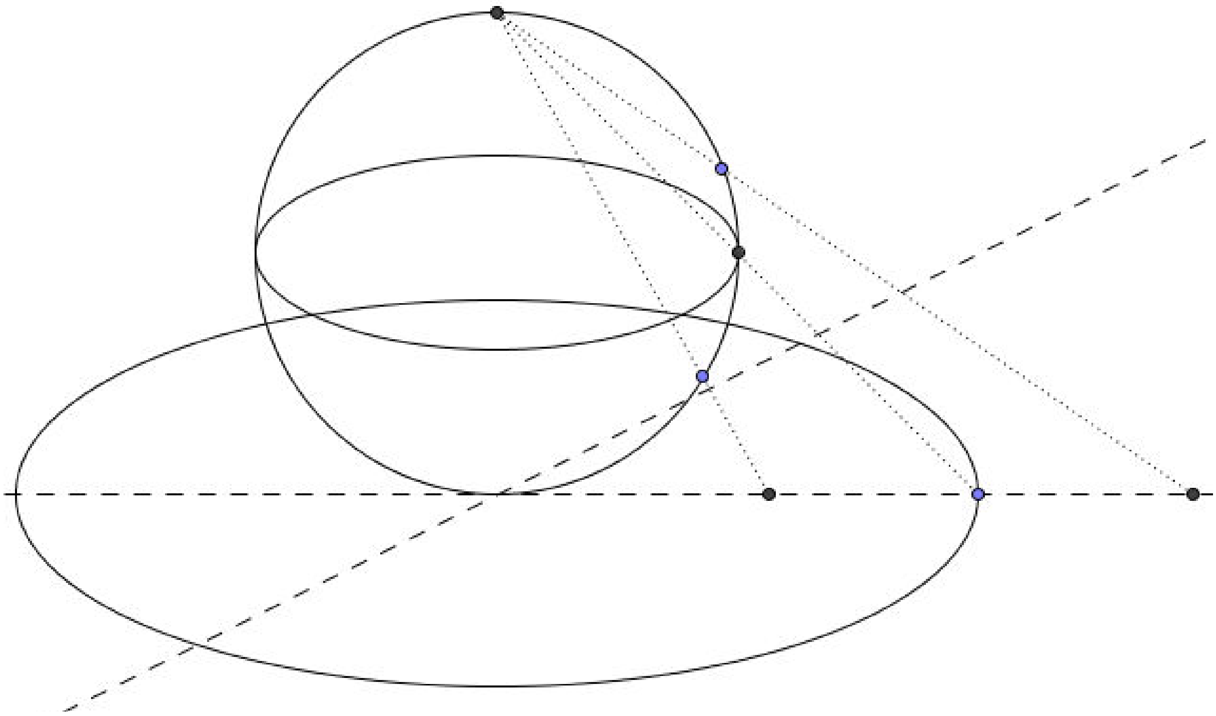
Übrigens gilt: $e^{i\pi} = -1$ oder $\mathbf{e^{i\pi} + 1 = 0}$, eine kurze Formel, in der die neutralen Elemente 0 und 1, die imaginäre Einheit i und die wichtigen transzendenten Zahlen e und π gemeinsam auftreten. Diese Formel wird von Mathematikern oft als schön empfunden.

Wir finden also drei gebräuchlichen Schreibweisen für komplexe Zahlen z:

$z = a+bi$, womit die Addition und Subtraktion einfach ausführbar ist,
$z = r\, e^{i\varphi}$, womit die Multiplikation, die Division und das Potenzieren leicht geht,
$z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$, als Zwischenform.

Ferner lassen sich komplexe Zahlen auch als spezielle reelle 2×2 Matrizen schreiben, a+bi entspricht $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen. Die zugehörigen linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ beschreiben Drehstreckungen, die der Multiplikation mit der komplexen Zahl a+bi entsprechen.

Die Riemannsche Zahlenkugel



Wir betrachten eine Kugel mit Durchmesser 1, die mit ihrem Südpol den Koordinatenursprung der Ebene berührt. Ihr Nordpol N hat die Koordinaten N(0,0,1). Mit der stereographischen Projektion lässt sich jeder Punkt der Ebene (hier die komplexen Zahlen C) einem Punkt der Kugeloberfläche zuordnen und umgekehrt, einzig der Nordpol hat keinen Bildpunkt. Ihm ordnet man einen zusätzlichen Punkt ∞ zu. Der Kugeläquator wird dem Einheitskreis der Ebene zugeordnet, die Nordhalbkugel dem Äußeren, die Südhalbkugel dem Inneren des Einheitskreises. Die offene Ebene wird durch Hinzunahme eines Punktes äquivalent zur geschlossenen Kugeloberfläche.

3. Geometrische Darstellung nach von Staudt und Locher-Ernst

Hier folge ich zunächst dem Abschnitt „Das Imaginäre in der Geometrie“ von L. Locher-Ernst (in: Geometrische Metamorphosen), der auf eine bedeutsame andersartige geometrische Darstellung nach K.G.C. von Staudt hinweist, die laut Locher-Ernst „unmittelbar dem Wesen der Sache entspricht“. Locher-Ernst wählt nicht den Zugang der reinen projektiven Geometrie, sondern den einfacheren mit Hilfe von Streckenlängen und Winkelmaßen. Dazu sind einige Grundbegriffe über Involutionen auf Geraden nötig.

Involutionen

Betrachtet wird eine Gerade g, die zusätzlich ihren unendlich fernen Punkt ∞ enthält. AB bezeichnet die Länge der Strecke von A nach B mit Vorzeichen.
Eine **Involution** ist eine injektive Abbildung f: $g \to g$, $P \mapsto f(P) = P'$, mit

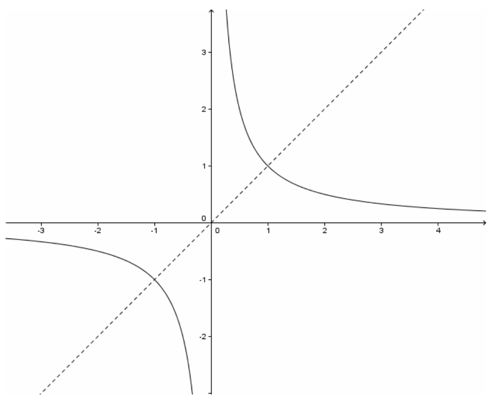
(I1) $f(f(P)) = P$, d.h. $f(P') = P$,
d.h. die Gerade g besteht aus zugeordneten Paaren (P,P’);
sei $M := f^{-1}(\infty)$ der Mittelpunkt der Geraden g;

(I2) es gibt eine reelle Zahl $k \neq 0$ (die Potenz der Involution) so,
dass für alle Paare $(P,P') \neq (M, \infty)$ gilt: $MP \cdot MP' = k$.

Für k>0 heißt die Involution hyperbolisch, für k<0 elliptisch.

Die folgenden beiden Beispiele mit $k = \pm 1$, der x-Achse als Gerade g und dem Nullpunkt als Punkt M sind bereits die wesentlichen auftretenden Fälle, da die Involution durch $x \cdot f(x) = k$ festgelegt ist.

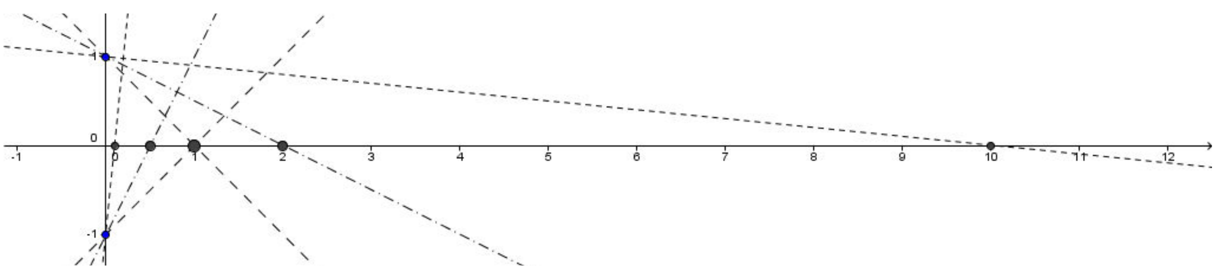
1.Beispiel f: $x \mapsto \frac{1}{x}$ erfüllt (I1), was man auch daran sieht, dass der Graph symmetrisch zur Geraden y = x ist, und (I2) wegen $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.
Es liegt eine hyperbolische Involution vor, k = 1.



Wenn x größer wird, so wird f(x) kleiner, x und f(x) durchlaufen die x-Achse in entgegengesetzter Richtung (der Graph ist auf beiden Ästen der Hyperbel jeweils fallend), es gibt zwei Begegnungspunkte, die Fixpunkte x = 1 und x = -1.
Die Zahl k ist positiv, damit liegen x und f(x) auf der gleichen Seite von 0.

Diese Abbildung entspricht der Spiegelung am Einheitskreis eingeschränkt auf R^1.

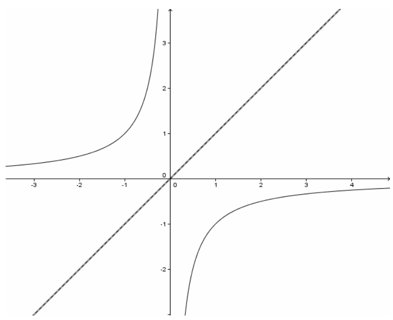
Ein anderes Bild wäre, sich zwei Zeiger vorzustellen mit unterschiedlichen Drehpunkten, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in positiver Richtung drehen. Zu jedem Zeitpunkt geben die Schnittpunkte mit der Geraden die zusammengehörigen Paare. Dabei treten zwei gemeinsame Punkte auf. Im Beispiel schneiden sich die Zeigergeraden im rechten Winkel.



Bei einer hyperbolischen (=gegenläufigen) Involution durchläuft ein Punkt P die Gerade in bestimmter Richtung und sein Bildpunkt P' in entgegengesetzter Richtung. Dadurch kommt es zu zwei Begegnungen in reellen Punkten der Gerade. Diese Punkte sind Fixpunkte der Involution. Bei einer gleichläufigen Involution gibt es keine Fixpunkte.

2.Beispiel f: $x \mapsto -\frac{1}{x}$ erfüllt (I1), wieder ist der Graph symmetrisch zur Geraden y = x, und (I2) wegen $x \cdot (-\frac{1}{x}) = -1$.

Es liegt eine elliptische Involution vor, k = -1.



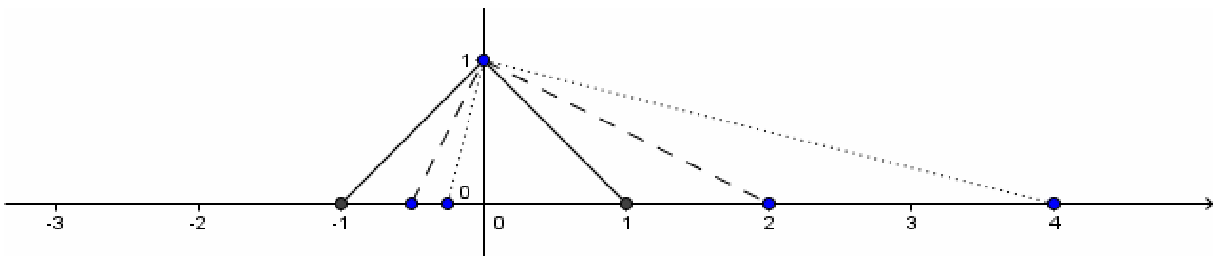
Wenn x größer wird, so wird f(x) ebenfalls größer, x und f(x) durchlaufen die x-Achse in gleicher Richtung (der Graph ist auf beiden Ästen der Hyperbel jeweils steigend).
Diese Involution hat keine reellen Fixpunkte.

Die Gleichung $x = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = -1$ hat jedoch die komplexen Lösungen $\pm$ i.

Die Zahl k ist negativ, damit liegen x und f(x) auf verschiedenen Seiten von 0.

Die Rechtwinkelinvolution als komplexe Zahl und ihre Pfeildarstellung

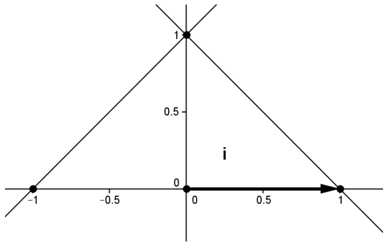
Im Folgenden betrachten wir gleichläufige Involutionen. Eine Möglichkeit, diese Involution zu verdeutlichen, besteht darin, sich einen Drehpunkt für einen rechten Winkel vorzustellen. Die beiden Schnittpunkte mit der x-Achse sind zusammengehörige Paare. Man spricht daher von einer Rechtwinkelinvolution.
Für die obige Involution f: $x \mapsto -1/x$ wird der Drehpunkt bei (0,1) gewählt. Der Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck $h^2 = p \cdot q$ zeigt, dass genau die Paare (x,f(x)) vorliegen.



Betrachtet man den Abstand von P und P', so wird er am kleinsten in der symmetrischen Position, also für x = 1 und f(x) = -1 oder umgekehrt. Diese **Engstelle** ist charakteristisch für die Involution und wird im Folgenden verwendet.

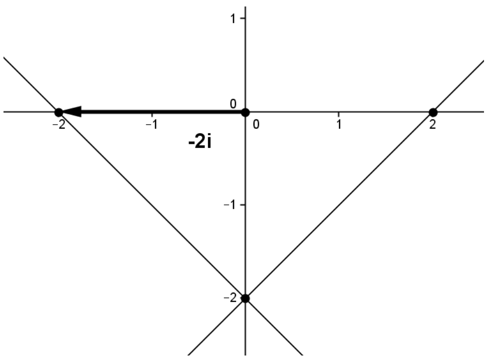
Bei einer elliptischen (=gleichläufigen) Involution, also k < 0, durchläuft der Bildpunkt P' die Gerade in gleicher Richtung wie der Punkt P. Es gibt keine Begegnungspunkte aber eine Engstelle. Locher-Ernst setzt eine **gleichläufige Involution** mit der **imaginären Zahl** $\sqrt{k} = i\sqrt{|k|}$ gleich, je nach Durchlaufrichtung mit $+\sqrt{k}$ oder $-\sqrt{k}$.

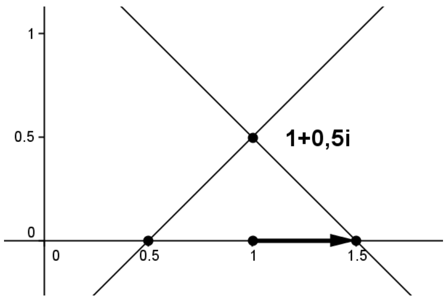
Da die koordinierten Bewegungen zeichnerisch schwer darstellbar sind, führt er als symbolische Bezeichnung einen **Pfeil** ein, der vom Mittelpunkt M der Involution, d.h. vom Mittelpunkt der Engstelle zu dem einen bzw. anderen Punkt der Engstelle geht.
Bei der obigen Rechtwinkelinvolution $x \mapsto -1/x$ wäre das der Pfeil, der i entspricht (bzw. –i für den Pfeil von 0 nach -1):



Der Drehpunkt einer Involution, die der Zahl a+bi entspricht, liegt bei (a,b), dem Ort der komplexen Zahl a+bi in der üblichen geometrischen Interpretation. Die Drehung wird immer mathematisch positiv im Gegenzeigersinn ausgeführt. Ist der Imaginärteil b negativ, so liegt der Drehpunkt unterhalb der Achse und der Pfeil zeigt nach links.

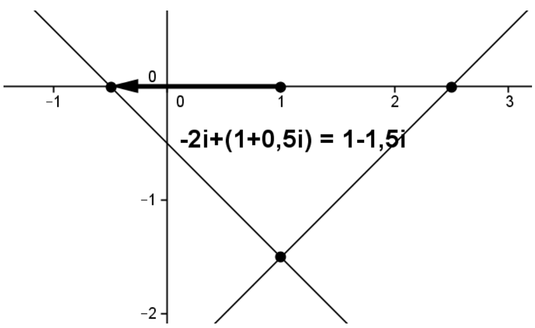
Weitere Beispiele:

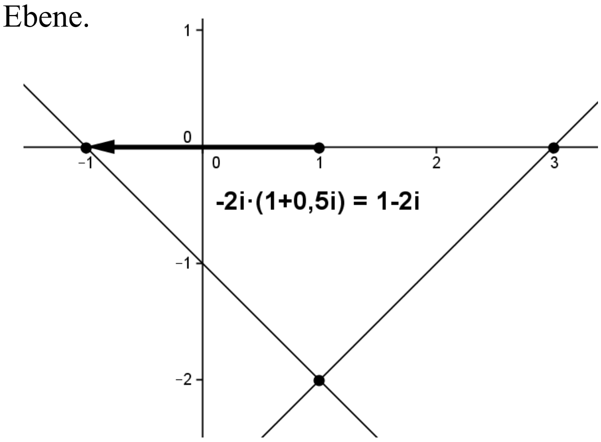




Der Anfangspunkt des Pfeils entspricht dem Realteil der komplexen Zahl, im Bild links für -2i bei 0, rechts für 1+0,5i bei 1. Der Pfeil entspricht einer gleichläufigen Involution auf der waagrechten Achse mit Mittelpunkt bei 0 bzw. 1.
Allgemein gilt: |Höhe des Drehpunkts| = Länge des Pfeils = $\sqrt{|k|}$.
Reelle Zahlen entsprechen Pfeilen der Länge 0 (zeichnerisch Punkte). Rein imaginäre Zahlen entsprechen Pfeilen, die bei 0 beginnen.
Jedem Pfeil auf der Geraden ist eine komplexe Zahl zugeordnet und umgekehrt. Bei jedem der ∞^1 Punkte der Geraden beginnen ∞^1 Pfeile und wir erhalten so ∞^2 komplexe Zahlen.

Rechenoperationen mit Pfeildarstellung
Die Rechenoperationen ergeben sich aus der zugehörigen Rechtwinkelinvolution. Entscheidend ist die Lage des Drehpunkts. Diese ergibt sich aus den Rechenregeln für komplexe und der Interpretation als Punkt in der Ebene.

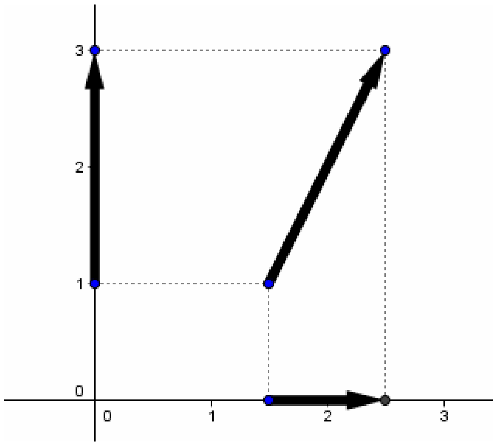




Die komplexe Ebene C^2

Diese Pfeildarstellung lässt sich auf die **Ebene** (und den Raum) ausdehnen. Mit dieser Pfeilsymbolik lässt sich der reell 4-dimensionale Raum C^2 in der 2-dimensionalen Zeichenebene darstellen. Das ist ein beachtlicher Vorteil gegenüber der üblichen Darstellung, bei der nur C^1 in der Zeichenebene erscheint.

Seien $z_1 = a_1+b_1i$ und $z_2 = a_2+b_2i$. Dann lässt sich der Punkt $(z_1, z_2) \in C^2$ in der Zeichenebene darstellen, indem (a_1, a_2) als Anfangspunkt und (a_1+b_1, a_2+b_2) als Endpunkt gewählt wird. Der Pfeil entspricht dem Vektor $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.



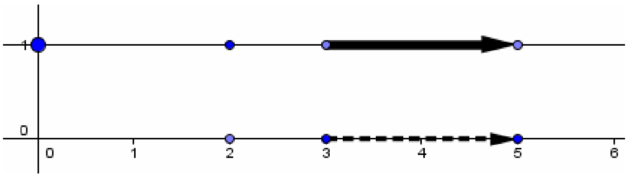
Im Bild ist das Beispiel $z_1 = 1{,}5+i$ und $z_2 = 1+2i$:
(z_1, z_2) entspricht einer gleichläufigen Involution auf der Geraden durch (a_1, a_2) und (a_1+b_1, a_2+b_2), das wäre
$y = \frac{b_2}{b_1} x + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1}$.
Der Mittelpunkt der Involution (=Pfeilanfang) ist (a_1, a_2).
Sind $z_1 = a_1+0i$ und $z_2 = a_2+0i$ beides reelle Zahlen, so wird das Paar $(z_1, z_2) = (a_1, a_2)$ durch den üblichen Punkt (a_1, a_2) der Ebene ohne Pfeil dargestellt.

Funktionen von C nach C

Damit haben wir die Möglichkeit, Funktionen von C nach C zu veranschaulichen. Wie sehen die Pfeilgraphen der komplexen linearen Funktionen f: $x \mapsto mx+t$ aus (wobei m und t komplexe Zahlen sind, $m=m_1+im_2$, $t=t_1+it_2$)?

1.Fall: m, t reell (x komplex)

1.Beispiel:
Die konstante Funktion f: $x \mapsto 1$

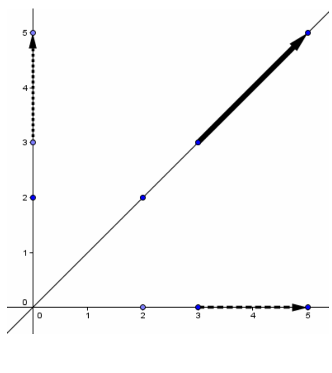


Die Definitionsmenge ist durch die waagrechte Achse dargestellt, reelle Zahlen sind Punkte, komplexe sind Pfeile.
Die Funktionswerte dieser Zahlen sind konstant der Punkt bei 1 auf der senkrechten Achse. Da der Funktionswert reell ist, tritt im Funktionswert kein Pfeil auf.
Die Paare (x, f(x)) sind einfach von der waagrechten Achse auf die Waagrechte in Höhe 1 verschoben. Im Bild sind die Paare (2, 1) und (3+2i, 1) gezeichnet.

2.Beispiel: Die identische Funktion f: $x \mapsto x$

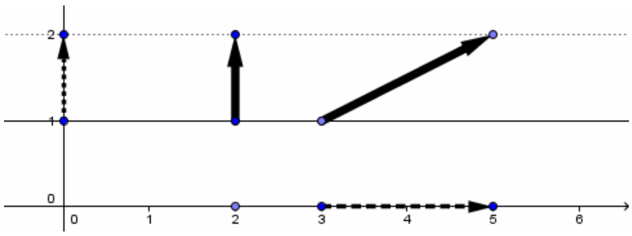
Die Paare (x, f(x)) sind alles Punkte oder Pfeile, die auf der reellen Geraden y = x liegen.

Im Bild sind nur die Paare (2, 2) und (3+2i, 3+2i) gezeichnet.



Das ist die typische Situation für komplexe Geraden mit reellen Koeffizienten: Sie enthalten die reellen Geradenpunkte, sowie alle Pfeile, die auf der reellen Gerade liegen, d.h. die Pfeilanfänge und –spitzen liegen jeweils darauf.
Es gibt ∞^1 Pfeilanfänge mit jeweils ∞^1 Spitzen, also ∞^2 Pfeile oder komplexe Geradenpunkte, während eine reelle Gerade ∞^1 Punkte hat.

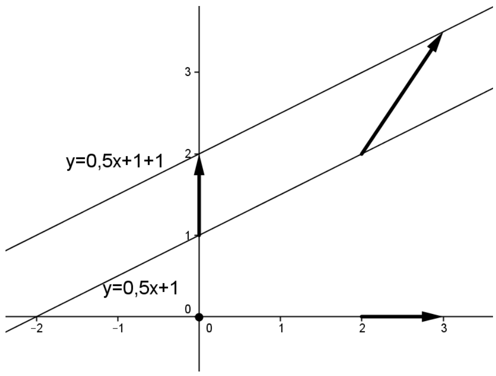
2.Fall: $m \in \mathbb{R}$, $t \notin \mathbb{R}$, $y = m_1 x + t_1 + it_2$ (x komplex)



3.Beispiel:
Die konstante Funktion f: $x \mapsto 1+i$

Die Funktionswerte dieser Zahlen sind immer konstant der Pfeil beginnend bei 1 mit Länge 1 in senkrechter Richtung. Die Paare (x, f(x)) sind alles Pfeile, die ihren Anfangspunkt auf der Waagrechten in Höhe 1 haben und ihren Endpunkt in Höhe 2 haben. Im Bild sind nur die Paare (2, 1+i) und (3+2i, 1+i) gezeichnet.

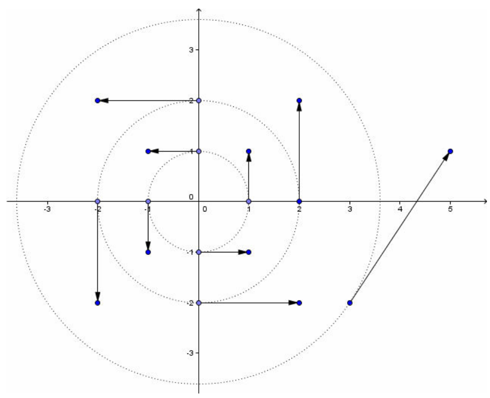
4.Beispiel f: $x \mapsto 0{,}5x + 1 + i$
Dargestellt werden die Paare (0,1+i) und (2+i, 2+1,5i).
Diese komplexe Gerade enthält keine reellen Punkte. Sie enthält alle Pfeil mit Fuß auf y = 0,5x+1 und Spitze auf y = 0,5x+2.
Allgemein liegt der Fuß auf der Geraden $y = m_1x+t_1$, die Spitze auf $y = m_1x+t_1+t_2$.



3.Fall: m komplex ($m_2 \neq 0$)

Dies ist nun der typische Fall, bei dem Wirbel entstehen.

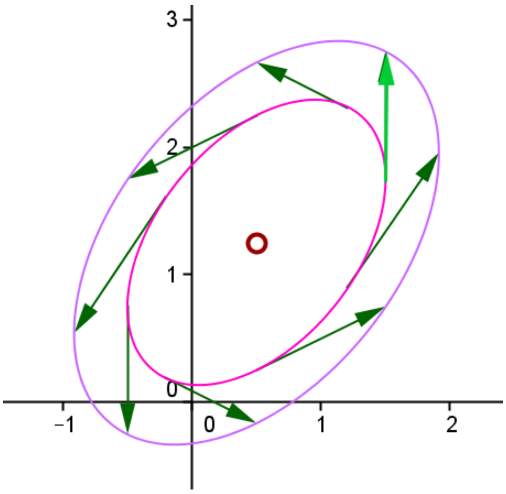
5.Beispiel: Die Funktion f: $x \mapsto ix$
Die Paare (x, ix) ergeben Pfeile, die tangential an konzentrischen Kreise um (0,0) liegen.



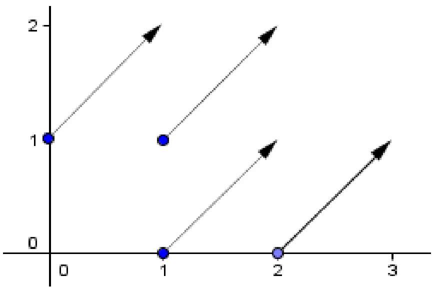
Bemerkung:
Allgemein entstehen elliptische Wirbel, für $m_2 > 0$ linksdrehend, für $m_2 < 0$ rechtsdrehend. Das Wirbelzentrum Z liegt bei $Z(-t_2/m_2,\ t_1 - t_2 \cdot m_1/m_2)$. Es sind ∞^2 Pfeilanfänge mit je einem Pfeil, also ∞^2 Pfeile oder komplexe Geradenpunkte, sowie das Wirbelzentrum als einzigen reellen Punkt. So zeigt sich in der komplexen Multiplikation wieder die Drehung.

Die Fußpunkte liegen auf Ellipse mit Mittelpunkt Z, die Spitzen auf den um $\sqrt{2}$ zentrisch gestreckten Ellipsen. Man erhält diese Ellipsen schrittweise, indem man die Ausgangsellipse $x^2 + y^2/m_2^2 = 1$, als Funktion $f(x) = \pm m_2\sqrt{1-x^2}$, mittels m_1 in y-Richtung verzerrt. Als Funktion ergibt sich $\tilde{f}(x) = \pm m_2\sqrt{1-x^2} + m_1x$. Diese Ellipse wird dann um den Vektor OZ so verschoben, dass sie ihren Mittelpunkt bei Z hat und beliebig an Z zentrisch gestreckt.

Im Bild: $y = (0{,}5+i)x + 1-0{,}5i$ mit $Z(0{,}5|\ 1{,}25)$.



Bemerkung:
Diese Darstellung ist nicht zu verwechseln mit der bildlichen Darstellung von Vektorfeldern. Beim Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird an jedem Punkt der Definitionsmenge, also der Ebene, der zugehörige Bildpfeil angelegt. Hier: $f: x \mapsto 1+i$.



4. Komplexe Punkte von Kegelschnitten (oft imaginär genannt)

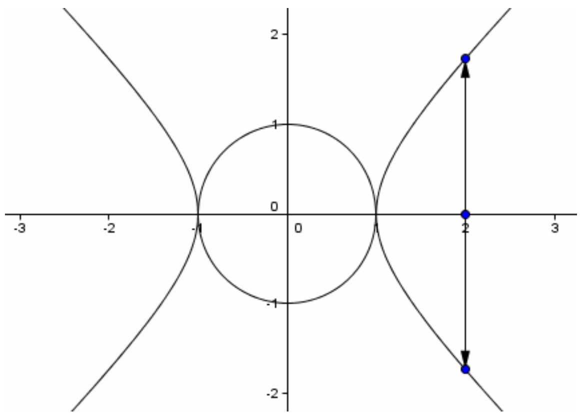
Komplexe Kreispunkte

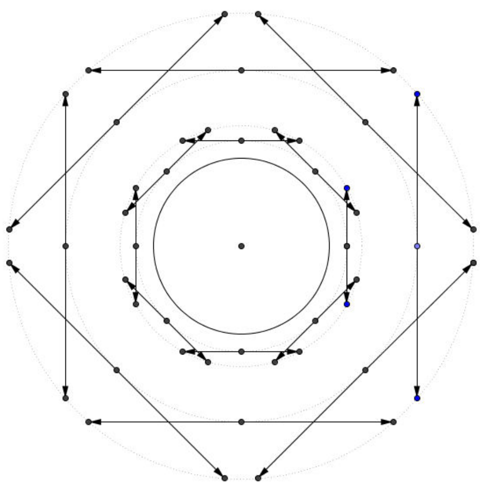
Wenn wir alle komplexen Geraden y = mx + t mit reellen Koeffizienten m und t betrachten, so erhalten wir alle ∞^4 Pfeile in der Ebene. Um alle komplexen Punkte eines Kegelschnitts zu bekommen, genügt es also seine Schnittpunkte mit allen solchen Geraden zu suchen.

Betrachten wir den Kreis K: $x^2 + y^2 = 1$ mit Radius 1 um den Ursprung in der Ebene.

Wir erhalten $y = \pm\sqrt{1-x^2} = \pm\sqrt{(-1)(x^2-1)} = \pm i\sqrt{x^2-1}$. Die Schnittpunkte des Kreises mit der Senkrechten x = 2 beispielsweise sind $y = \pm\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$.

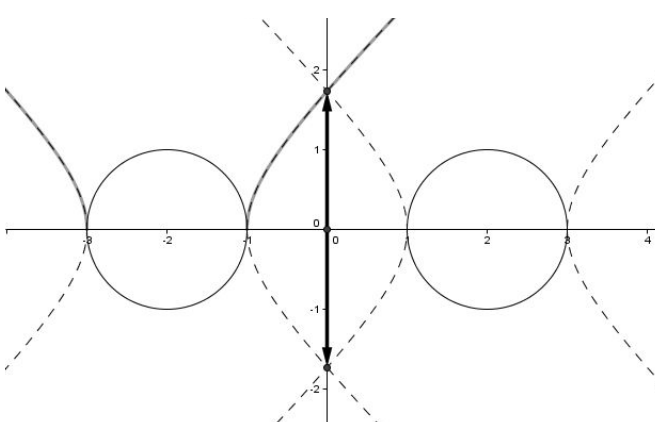
Die Paare (x, y) sind also senkrechte Pfeile bei x mit Höhe $\sqrt{x^2-1}$. Die „Amplitudenlinie“ der Pfeilenden ist also die Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$. Die komplexen Schnittpunkte mit nicht-senkrechten Geraden entstehen bildlich durch Rotation um den Kreismittelpunkt.





An jedem Kreispunkt eines Kreises, der größeren Radius als der Ausgangskreis hat, beginnen zwei tangentiale Pfeile der komplexen Kreispunkte. Ihre Länge ist durch die begrenzende Hyperbel gegeben. Die Pfeile lassen das Kreisinnere frei.

Das ergibt beispielsweise folgende komplexe Schnittpunkte von zwei Kreisen:



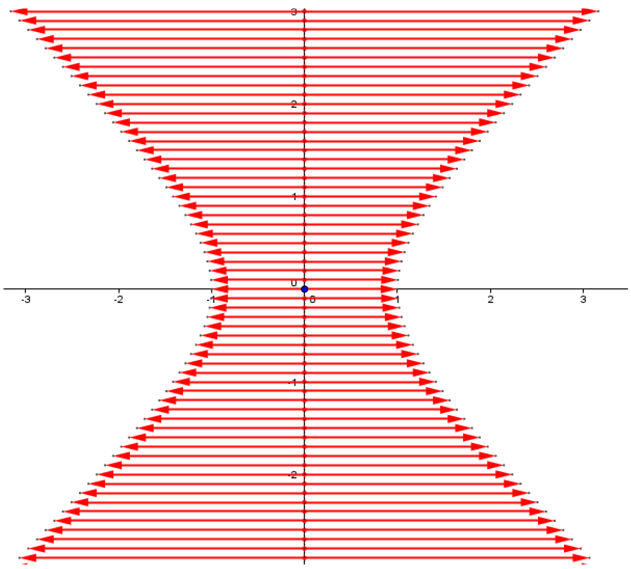
Im Komplexen haben die beiden Kreise etwas Gemeinsames. Rudolf Steiner verwies im Zusammenhang mit den getrennten Ästen der Cassinischen Kurve darauf, dass man aus dem Raum heraus müsse und dann wieder herein, wenn man von einem Ast zum anderen will (Stuttgart, 15.1.1921, zitiert nach U.Kilthau und G.Schrader Z623). Ist das Gemeinsame dieser beiden Kreise ähnlich außerräumlich?

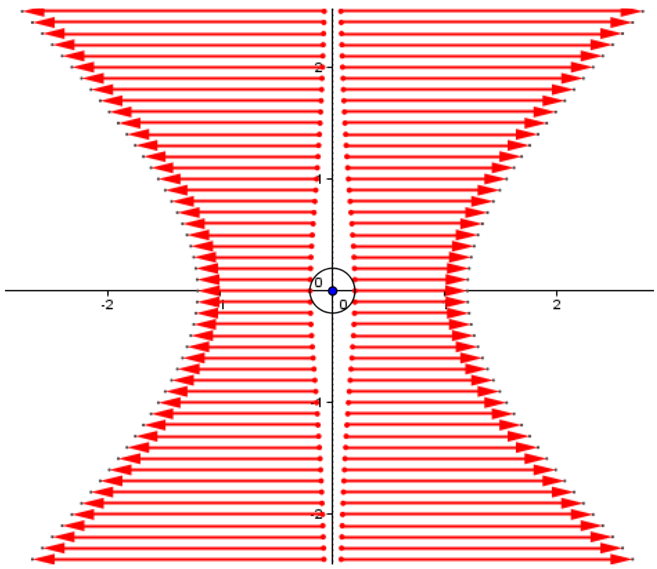
Wir können nun für r^2 eine beliebige komplexe Zahl setzen und erhalten einen Kreis aus nur nicht-reellen Punkten. Nur wenn r^2 eine positive reelle Zahl ist, gibt es reelle Kreispunkte. Durch Rotation um (0,0) erhält man alle komplexen Punkte.

Einige Beispiele für **komplexe Kreise** $x^2 + y^2 = r^2$:

Hier mit r = i, also $x^2 + y^2 = -1$.
Die Pfeilspitzen liegen jeweils auf Hyperbeln.

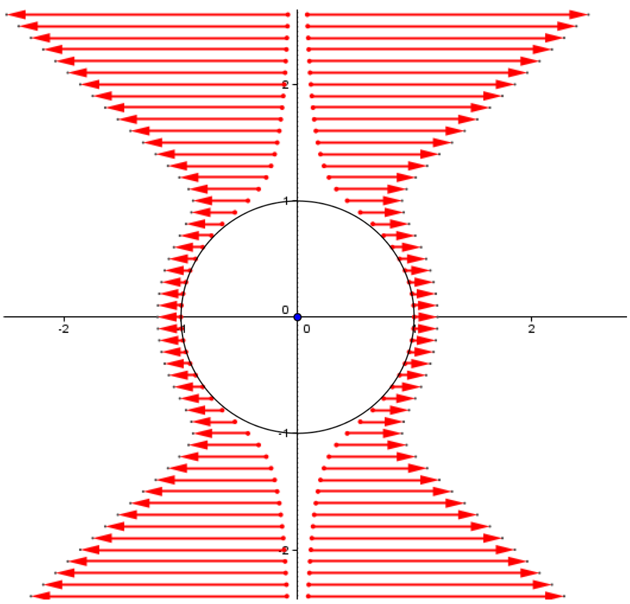
Hier r = 0,2+i.

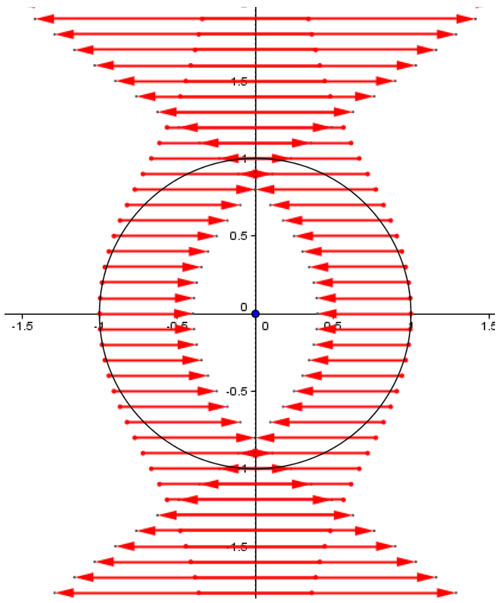




Hier mit r = 1+0,2i

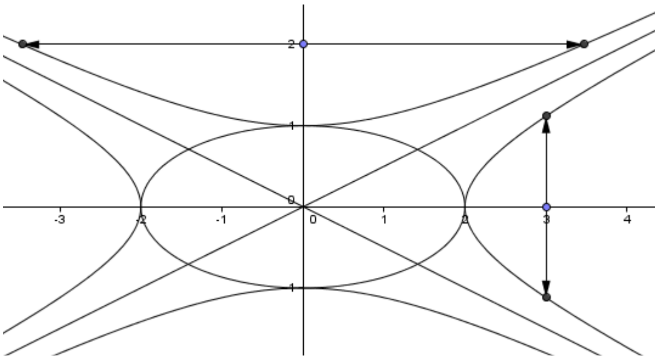
hier mit r = 1-0,6i.

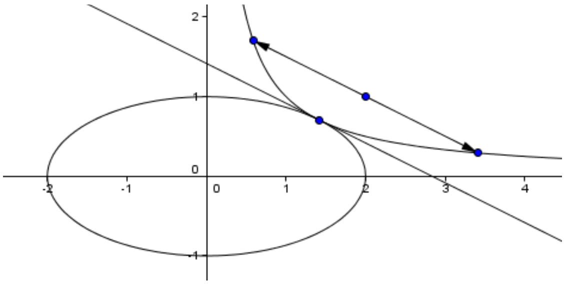




Komplexe Ellipsenpunkte

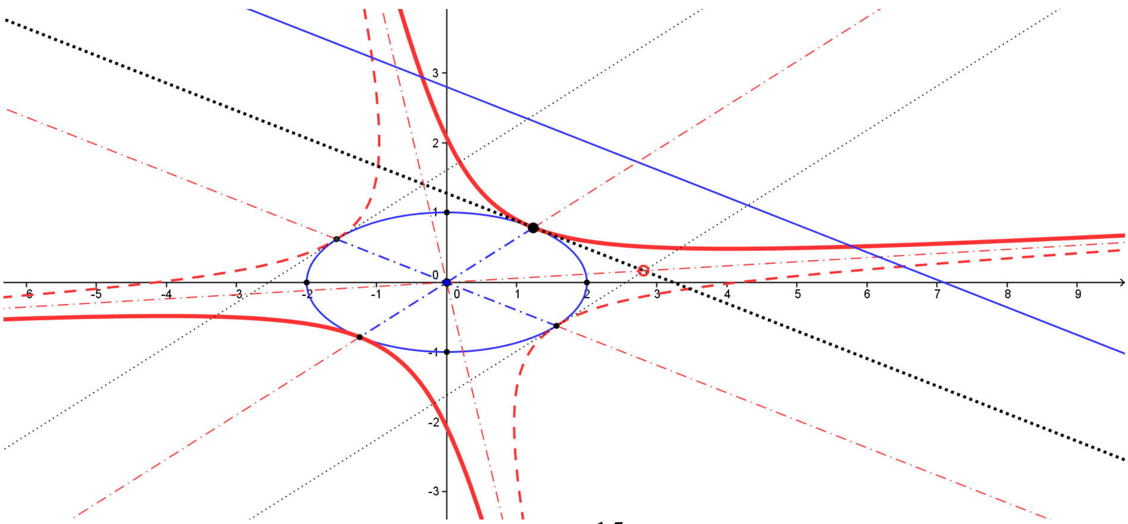
Hier, im Beispiel $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, ergeben sich ähnliche Bilder wie beim Kreis:



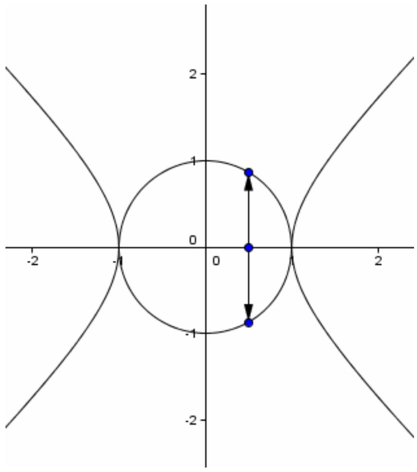


Beispielsweise mit dem dynamischen Geometrieprogramm geogebra kann der Berührpunkt der Hyperbel auf der Ellipse verschoben werden. Wenn die Hyperbel dabei die Ellipse E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{1} = 1$ (o.E. b = 1) im Punkt A mit der Tangentensteigung m_A berührt, so berührt die konjugierte Hyperbel (zu H: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist H^*: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ die konjugierte Hyperbel mit den gleichen Asymptoten) die Ellipse in demjenigen Punkt B, so dass für die dortige Tangentensteigung m_B gilt: $m_A \cdot m_B = -1/a^2$.
Die Tangenten in diesen beiden Berührpunkten schneiden sich auf der Hyperbelasymptote.
Die Asymptotengleichungen sind: $y = \frac{am-1}{a(am+1)}x$ und $y = \frac{-(am+1)}{a(am-1)}x$.

Die Verbindungsstrecken der Berührpunkte der Ellipse mit der Hyperbel bzw. der konjugierten Hyperbel bilden ein Paar von konjugierten Durchmessern der Ellipse, ihre Verlängerungen sind konjugierte Durchmesser der Hyperbeln (d.h. beide Durchmesser halbieren die Sehnen parallel zum anderen Durchmesser). Die beiden konjugierten Durchmesser und die beiden Asymptoten bilden vier Geraden in harmonischer Lage. Werden sie von einer Geraden geschnitten so liegen die vier Schnittpunkte in harmonischer Lage, d.h. ihr Doppelverhältnis ist -1 (s. H.v.Baravalle, Geometrie als Sprache der Formen, S.116).



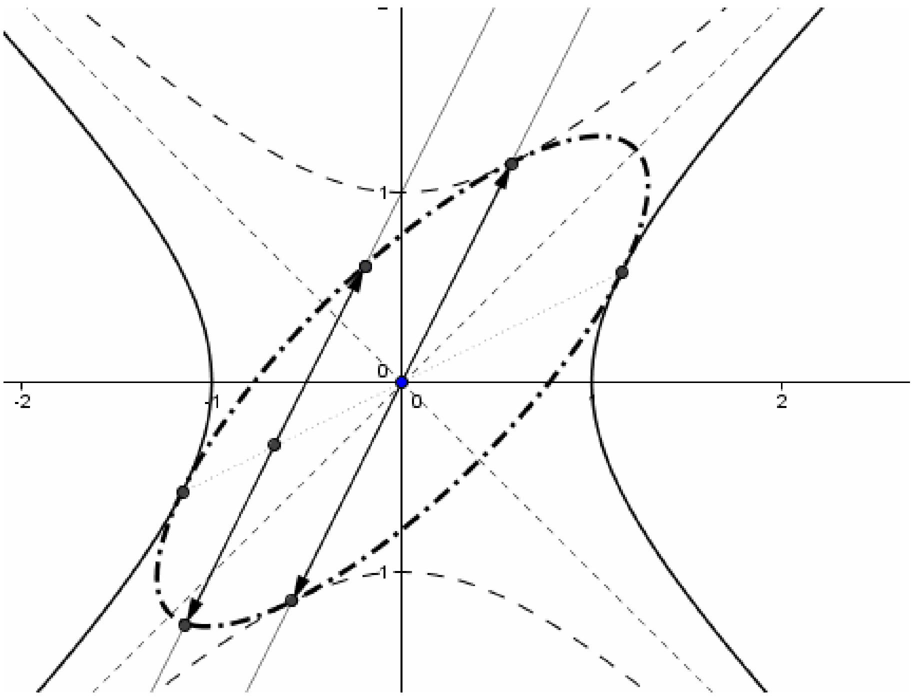
Komplexe Hyperbelpunkte



Ähnlich kann man die komplexen Punkte zu der **Hyperbel** $x^2 - y^2 = 1$ suchen.

Die Hyperbel hat für $-1 < x < 1$ keine reellen Schnittpunkte mit den Senkrechten, jedoch komplexe, z.B. $x = 0{,}5$: $0{,}25 - y^2 = 1$, also $y^2 = -0{,}75$ und damit $y = \pm\sqrt{-0{,}75} = \pm i\sqrt{0{,}75}$. Die Pfeilspitzen liegen auf dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$.

Weitere komplexe Punkte dieser Hyperbel erhält man z.B. durch Schnitt mit der Parallelenschar $y = 2x + t$ für $-\sqrt{3} < t < \sqrt{3}$.



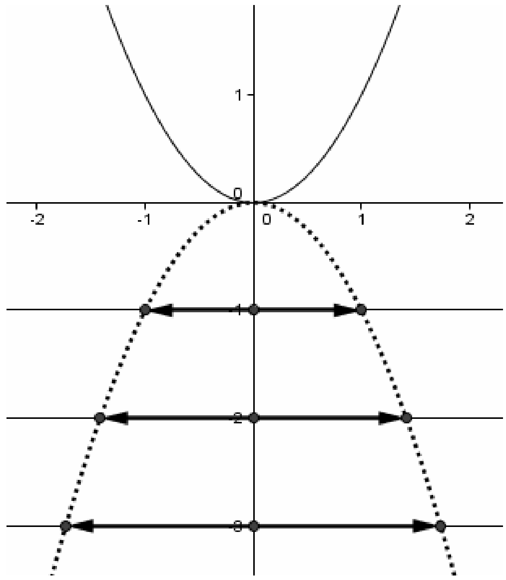
Die Pfeilspitzen liegen auf einer Ellipse ($a^2 = 3$, $b^2 = 1/3$), die die Hyperbel und die konjugierte Hyperbel berührt. Für $t = 0$ ist der Berührpunkt mit der konjugierten Hyperbel gleichzeitig die Pfeilspitze. Auch hier finden sich konjugierte Durchmesser.

Bemerkung:
Die Konstruktion ist wechselseitig (was dann bei den Parabeln leicht sichtbar ist) im folgenden Sinn: Zu einer gegebenen Ellipse E und einer Parallelenschar gewinnt man eine Amplitudenhyperbel H für die komplexen Ellipsenpunkte. Beginnt man umgekehrt mit dieser Hyperbel H und der gleichen Parallelenschar, so erhält man für die komplexen Hyperbelpunkte die Amplitudenellipse E.

Die Kegelschnitte Ellipse (bzw. Kreis) einerseits und Hyperbel andererseits ergänzen sich.

Komplexe Parabelpunkte

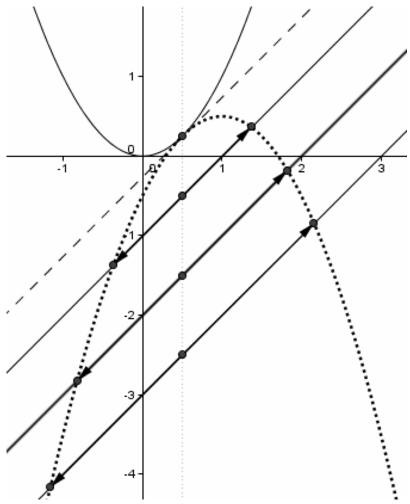
Schneiden wir die Parabel $y = x^2$ mit den Waagrechten $y = t$ für $t < 0$, so erhalten wir $x = \pm\sqrt{t} = \pm i\sqrt{|t|}$ und damit die Paare $(\pm i\sqrt{|t|}, t)$. Also ist Realteil(x) = 0, die Pfeile beginnen auf der negativen y-Achse, und Imaginärteil(y) = 0, die Pfeile sind waagrecht. Sie enden auf der gespiegelten Parabel $y = -x^2$.



Schneiden wir die Parabel beispielsweise mit den Geraden $y = x + t$ für $t = -1, -2, -3$, so ergibt sich folgendes Bild:

Die Parabel wird durch eine gespiegelte Parabel ergänzt. Das Spiegelzentrum ist der Berührpunkt B(0,5, 0,25) der Parabel mit der Geraden $y = x - 0{,}25$ aus der Parallelenschar.

Die Senkrechte durch den Berührpunkt halbiert die Sehnen der Parallelenschar wie ein konjugierter Durchmesser. Allerdings können die Senkrechten nicht halbiert werden, da sie erst im Unendlichen wieder die Parabel treffen.



Diese Beispiele führen zur **Kegelschnitt-Korrespondenz:**

Die komplexen Punkte eines Kegelschnitts, also die Schnittpunkte einer Ellipse bzw. Hyperbel bzw. Parabel mit einer Parallelenschar G: $y = mx + t$ mit fester Steigung m, liegen so, dass die Pfeilspitzen auf einer Hyperbel bzw. Ellipse bzw. Parabel liegen, d.h.
Ellipse/Kreis → Hyperbel, Hyperbel → Ellipse/Kreis, Parabel → Parabel.

Beweisskizze: z.B. für die Ellipse E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
Einsetzen von $y = mx + t$ liefert die quadratische Gleichung $b^2x^2 + a^2(mx+t)^2 = a^2b^2$.
Mit der Lösungsformel $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ erhält man für $t^2 > 1+a^2m^2$ die imaginären Lösungen $x = \frac{-a^2mt \pm abi\sqrt{t^2-b^2-a^2m^2}}{b^2+a^2m^2}$,
d.h. für die Pfeilenden gilt: $(b^2+a^2m^2)x + a^2mt = \pm ab\sqrt{t^2-b^2-a^2m^2}$
und nach Quadrieren $(b^2+a^2m^2)^2 x^2 + 2(b^2+a^2m^2)a^2mtx + a^4m^2t^2 = a^2b^2(t^2-b^2-a^2m^2)$.
Setzt man für $t = y - mx$, so entsteht eine Gleichung mit den Variablen x^2, xy und y^2, die bekanntlich einen Kegelschnitt beschreibt.

Die Linie der Pfeilanfänge ist gegeben durch $(\mathrm{Re}\, x_{1/2}, \mathrm{Re}\, y_{1/2})$, die Linie der Pfeilenden ist $(\mathrm{Re}\, x_{1/2} + \mathrm{Im}\, x_{1/2}, \mathrm{Re}\, y_{1/2} + \mathrm{Im}\, y_{1/2})$.

Nach O.Conradt ist die Gleichung der Hyperbel bzw. der Ellipse:
$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{4mxy}{b^2 \mp a^2m^2} \mp \frac{y^2}{b^2} + \frac{b^2 \pm a^2m^2}{b^2 \mp a^2m^2} = 0.$$

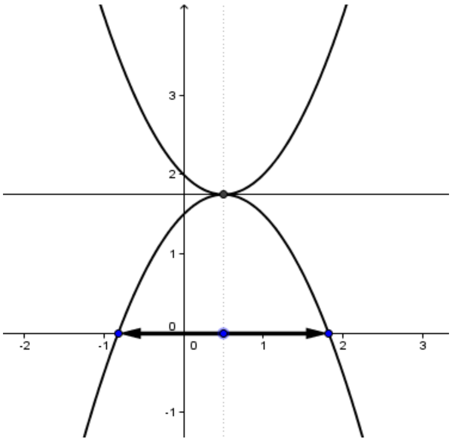
Also gilt:
Zur Ellipse E erhalten wir eine Hyperbel H', die E im Schnittpunkt mit $y = mx$ berührt.
Bei der Parabel P: $y = ax^2 + bx + c$ und der Parallelenschar G: $y = mx + t$ erhalten wir durch Punktspiegelung am Berührpunkt die Parabel P': $y = -ax^2 + (2m-b)x - \frac{(m-b)^2}{2a} + c$.
Bei der Hyperbel H erhalten wir die Ellipse E', die H im Berührpunkt mit G berührt und die konjugierte Hyperbel im Schnittpunkt mit $y = mx$ berührt.

Jede Gerade hat mit jedem Kegelschnitt genau 2 Punkte gemeinsam, reelle oder komplexe, wenn man die Berührpunkte doppelt zählt und die unendlich fernen Punkte mitbetrachtet.

Komplexe Lösungen quadratischer Gleichungen

Kommen wir nun zurück auf eines der Ausgangsprobleme im Zusammenhang mit komplexen Zahlen. Wie kann man sich die komplexen Lösungen einer quadratischen Gleichung bzw. die komplexen Nullstellen einer Parabel vorstellen?

Wir betrachten als Beispiel die quadratische Gleichung $0 = x^2 - x + 2$. Die Lösungen sind $x_{1/2} = 0{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{7}\,i$.



Die zur Gleichung $0 = x^2 - x + 2$ gehörige Parabel lautet $y = x^2 - x + 2$. Spiegelt man diese an der Waagrechten in Scheitelhöhe, so erhält man die Parabel $y = -x^2 + x + 1{,}5$ mit den reellen Nullstellen $x_{1/2} = 0{,}5 \pm 0{,}5\sqrt{7}$.

Man erhält also die komplexen Lösungspfeile, indem man als Anfangspunkt den Realteil der komplexen Lösung (d.h. die x-Koordinate des Scheitels der zugehörigen Parabel), als Endpunkte die Summe von Realteil und Imaginärteil (d.h. die reellen Nullstellen der gespiegelten Parabel) wählt.

5. Rückschau und Bezug zum Menschen

Historisch haben sich die komplexen Zahlen entwickelt, indem Wurzeln aus negativen Zahlen betrachtet wurden, die in dem bis dahin üblichen Zahlbereich nicht existent waren, bei Rechnungen nach den bekannten Gesetzen teils stimmige und nützliche oder sogar elegante Ergebnisse hervorbrachten. So bürgerten sie sich trotz einiger Widersprüche und unklarer Interpretation immer mehr ein, bis dann schließlich eine konsistente mathematische Theorie und zugehörige geometrische Deutungen gefunden werden konnten.
Der Zahlbereich wurde erweitert zur Gaussschen Zahlenebene, wobei die Rechenregeln für die Körpereigenschaft weiter gelten. Lediglich die Eigenschaft der Anordnung, d.h. der Größenvergleich von komplexen Zahlen, geht verloren.
Dabei treten einige neue Phänomene auf und insbesondere bei den höheren Rechnungsarten des Wurzelziehens und Logarithmierens muss man Vorsicht walten lassen.

F.H.B.Franke (Der dreifache Aspekt der komplexen Zahlen in Verbindung mit den Rechnungsarten, in: Die Drei, Dezember 1929, IX.Jahrgang, 9.Heft) weist auf einige interessante Bezüge hin, von denen ich zwei kurz anführen möchte.

Die Riemannsche Zahlenkugel stellt etwa Abgeschlossenes dar, das einen Innenraum umschließt. Das Bild des Innenraums könnte mit dem inneren Erleben als Ausdruck des Astralleibs bei Mensch und Tier in Verbindung gebracht werden.

Ferner bezieht er die drei Größen r, φ und m der Polarkoordinatendarstellung $z = r \cdot e^{i(\varphi+2m\pi)}$ auf die drei Seelenkräfte des Menschen, das Denken, Fühlen und Wollen. Diese wurden von Rudolf Steiner so charakterisiert, dass das Denken bei hellwachem Bewusstsein stattfindet, das Fühlen dem Traumbewusstsein entspricht und das Wollen dem unbewussten Tiefschlaf. Franke schreibt (mit angepassten Bezeichnungen): „Die Klarheit und scharfe Konturierung des Denkens lebt in der starren Größe des r; der Lebenstraum des Fühlens spiegelt sich in der Größe φ und das im gewöhnlichen Leben verschlafene Willenselement geht durch die Größe m in den Bereich des Komplexen ein.“

Völlig anders ist die Betrachtung der imaginären Zahlen als gleichläufige Involutionen mit ihrer Pfeildarstellung, die aus der projektiven Geometrie herkommt. Hier ergeben sich viele bildliche Möglichkeiten. Mich erinnert die Situation der beiden Punkte, die sich annähern und wieder entfernen, an den Lauf von Himmelskörpern („astrale Welt“) oder auch an Menschen, die von der Sympathie geführt näher zusammen kommen und zu anderer Zeit mit Antipathie auf Distanz gehen.

Betrachtet man auch die komplexen Punkte bei Kreisen und Ellipsen, so erstrecken sich diese bis ins Unendliche wie die anderen Kegelschnitte, die Parabeln und Hyperbeln. An jeder Stelle im Äußeren einer Ellipse oder Parabel beginnen zwei Pfeile in entgegengesetzter Richtung und gleicher Länge. Bei Hyperbeln treten nur Geraden mit bestimmter Steigung als Tangenten auf. Auf der Linie zwischen den jeweiligen Berührpunkten liegen die Pfeilanfänge. Die Pfeile lassen auch das Innere der konjugierten Hyperbeln unberührt.

Kegelschnitte wurden schon durch Apollonius von Perge ca. 200 v.Chr. untersucht. In der projektiven Geometrie spielen sie eine bedeutsame Rolle. E.Bindel (in: Die Kegelschnitte) bringt sie mit dem Menschen in Verbindung: die Ellipse zum Denken und dem Nervensinnessystem, die Parabel zum Fühlen und dem rhythmischen System, die Hyperbel mit dem Wollen und dem Stoffwechsel-Gliedmaßensystem.

Auffällig ist die Korrespondenz der Kegelschnitte. Die Zeichnungen verdeutlichen, dass jeweils die komplexen Kreis- bzw. Ellipsenschnittpunkte mit einer Parallelenschar von Hyperbeln berandet werden, die komplexen Hyperbelschnittpunkte von Ellipsen und die komplexen Parabelschnittpunkte von Parabeln. Damit lassen sich als Anwendung komplexe Lösungen von quadratischen Gleichungen über eine Spiegelung geometrisch veranschaulichen.

In den entstehenden Zeichnungen berühren sich die beiden Kurven jeweils. Lawrence Edwards (Projective Geometry, S. 167, wo ein Teil der Korrespondenz erwähnt ist) schreibt dazu: „…(the hyperbola) touches its ellipse in a most harmonious and satisfying way".
Inneliegende Schönheit war für Goethe bedeutsam: „Das Schöne ist eine Manifestation geheimer Naturgesetze, die uns ohne dessen Erscheinung ewig wären verborgen geblieben", und ebenso für Steiner: *„Und eine Ellipse schön finden, was heißt das? Das heißt: mein Astralleib addiert und kriegt immer dieselbe Summe. Und denken Sie sich einmal, dass Sie addieren, ohne dass Sie es wissen und jedes Mal dieselbe Summe kriegen: da freuen Sie sich ein bisschen."* , sowie eine Woche später: *„Der Grund, warum er dies als Wärme durch seine Seele, durch sein Herz ziehen fühlt, der Grund ist der, dass in diesem Augenblick, wenn er in seinem Astralleib so bewusst wäre wie im Ich, er eine tiefe Erkenntnis durchschauen würde in Bezug auf den Kosmos."* (in: R.Steiner, Wege zu einem neuen Baustil, S.152, S.174).

E.Müller schreibt im Zusammenhang mit der Gestaltänderung beim Übergang vom Reellen zum Imaginären (Vom Imaginären in der Geometrie, in: Die Drei, September 1930, X.Jahrgang, 6.Heft): „…erfährt man, wie geometrische Gestalt ihrem Wesen nach sich nicht im sichtbaren Raume erschöpft, sondern wie das Gestaltwirkende gerade dort zu suchen ist, wo – im mathematischen Prozess überschaubar – Sichtbares in Unsichtbares übergeht."

Nach Rudolf Steiner (Die Geheimwissenschaft im Umriss, S.80ff) verlässt der Astralleib den physischen Leib beim Schlaf, was eine gewisse Ähnlichkeit hat mit dem Verlassen der „physisch festen", reellen Punkte beim Übergang zu den weniger greifbaren imaginären Punkten im Sinne einer Involution oder eines „Aus-dem-Raum-herausgehen", das bei Steiner immer wieder angesprochen wurde.

Die Vorstellung von komplexen Zahlen als gleichläufigen Involutionen, was einem rhythmischen Kreisen entspricht, wirft auch ein Licht auf die Aussage von Heinz Grill (in: Die Idee der Synthese von Spiritualität und Baukunst, S.97): *„Mit dem Astralleib ist das Wesen des Rhythmus sehr nahe verwandt."*, wobei Grill den Rhythmus im gewöhnlichen Sinn - wie beispielsweise in der Musik oder einer gleichläufig kreisenden Involution - als Ausdruck eines inneren Vorgangs sieht: *„Dieser seelische Werdeprozess von Rhythmus ist dahingehend zu sehen, dass ein sogenanntes Oberes und ein Unteres oder ein Kosmisches und ein Irdisches aufeinandertreffen müssen."* Trifft das Imaginäre auf das Reelle in ähnlicher Weise wie das Kosmische auf das Irdische?